

A betámasztott lemez egy újabb geometriai feladata

Bevezetés

A „betámasztott lemez” - probléma már több dolgozatunkban megjelent, még ha nem is így neveztük. Ilyen előző (*ED*) és korábbi (*KD*) dolgozataink:

~ *ED – 1: Ismét egy szép statikai feladat ;*

~ *ED – 2: A betámasztott lemez általánosabb feladata ;*

~ *ED – 3: A betámasztott lemez éleiről ;*

~ *KD – 1: Egy derékszögű tetraéder - feladatról .*

A „betámasztott lemez” - probléma onnan kapta a nevét, hogy egy háromszög alakú lemez csak egy bizonyos helyzetben illeszthető be egy derékszögű testszögletbe, úgy, hogy a lemez minden éle végig felfeküdjön. Korábbi geometriai és ezzel összefüggő statikai vizsgálódásaink egyik fő célja éppen ezen egyedi (egyensúlyi) helyzet megkeresése volt. Az ennek kapcsán kapott eredményeinket most egy kicsit másképpen használjuk fel.

A feladat

Adott:

egy (*a, b, c*) oldalú, általános háromszög alakú lemez. Ezt úgy támasztjuk neki egy *Oxyz* derékszögű koordináta - rendszer koordináta - síkjainak, hogy minden éle felfeküdjön azokon.

Keresett:

~ a lemez síkja által a koordináta - tengelyekből lemetezett hosszak

$u = u(a, b, c), v = v(a, b, c), w = w(a, b, c)$ függvényei;

~ a lemez - sík hajlásának $\varphi = \varphi(a, b, c)$ függvénye;

~ a lemez *O* - tól mért távolságának $d = d(a, b, c)$ függvénye.

Útmutatás: a homogén lemez állandó vastagságát elhanyagolhatjuk.

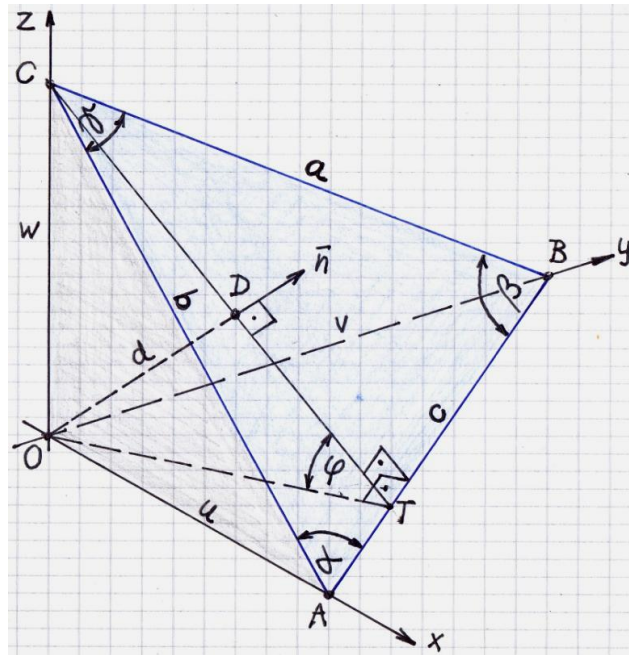
A megoldáshoz először tekintsük az 1. ábrát!

Itt feltüntettük az adott és keresett, valamint egyéb segédmennyiségeket is.

Ilyen pl.: *n* – az *ABC* háromszög síkjának normálvektora, vagy a háromszög *α, β, γ* szögei is.

Első lépésként alkalmazzuk a koszinusz - tételt !

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha, \quad (1)$$



1. ábra

innen:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}, \quad (2)$$

majd ebből:

$$b \cdot c \cdot \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}. \quad (3)$$

Az 1. ábra alapján *Pitagorász* tételével:

$$u^2 + v^2 = c^2, \quad (4)$$

$$u^2 + w^2 = b^2, \quad (5)$$

$$v^2 + w^2 = a^2. \quad (6)$$

Most (3), (4), (5) és (6) - tal:

$$b \cdot c \cdot \cos \alpha = \frac{u^2 + w^2 + u^2 + v^2 - v^2 - w^2}{2} = u^2. \quad (7)$$

Majd (3) és (7) összehasonlításából:

$$u^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} \rightarrow \underline{\underline{u(a, b, c) = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}}}. \quad (8)$$

Hasonlóképpen:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}; \quad (9)$$

majd ebből:

$$a \cdot c \cdot \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} = v^2, \quad (10)$$

innen:

$$\underline{\underline{v(a, b, c) = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}.}} \quad (11)$$

Ugyanígy:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}; \quad (12)$$

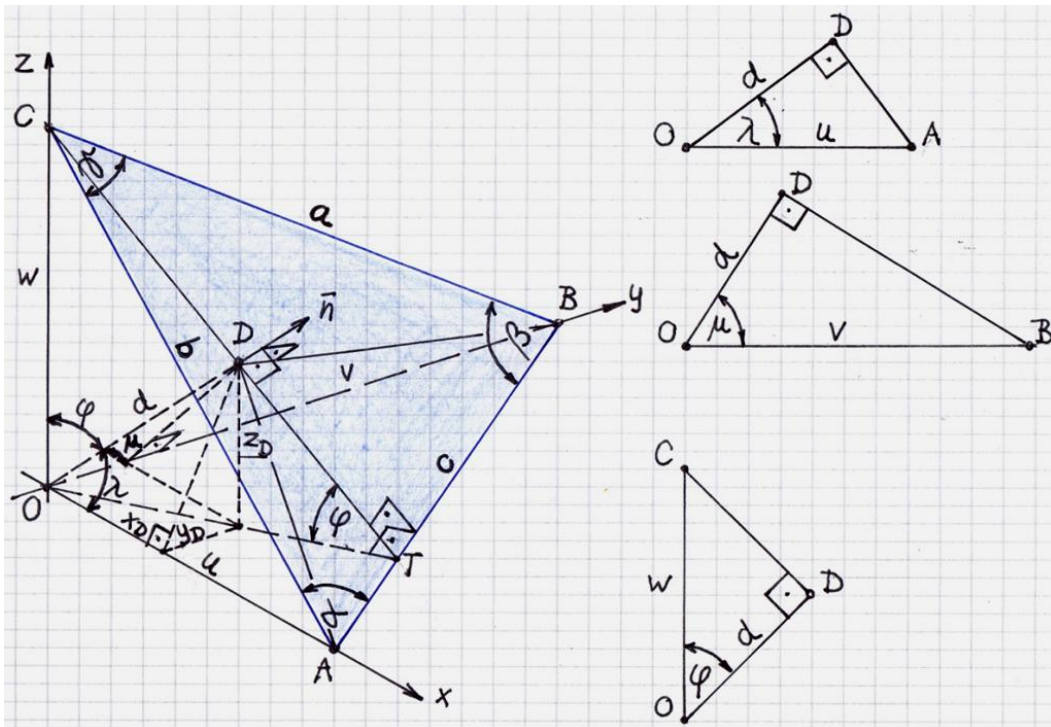
majd ebből:

$$a \cdot b \cdot \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = w^2, \quad (13)$$

innen:

$$\underline{\underline{w(a, b, c) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.}} \quad (14)$$

Második lépésként vegyük szemügyre a 2. ábrát!



2. ábra

Innen leolvasható, hogy a **D** pont koordinátái:

$$x_D = d \cdot \cos \lambda = d \cdot \frac{d}{u} = \frac{d^2}{u}, \quad (15 / 1)$$

$$y_D = d \cdot \cos \mu = d \cdot \frac{d}{v} = \frac{d^2}{v}, \quad (15 / 2)$$

$$z_D = d \cdot \cos \varphi = d \cdot \frac{d}{w} = \frac{d^2}{w}. \quad (15 / 3)$$

Minthogy a **D** pont rajta van az **ABC** síkon, így kielégíti annak

$$\frac{x_D}{u} + \frac{y_D}{v} + \frac{z_D}{w} = 1 \quad (16)$$

alakú – úgynevezett *tengelymetszetes* – egyenletét.

Ezután (15) és (16) - tal:

$$\frac{d^2}{u^2} + \frac{d^2}{v^2} + \frac{d^2}{w^2} = 1; \quad (17)$$

rendezve:

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} = \frac{1}{d^2}. \quad (18)$$

A (18) egyenlet segítségével adunk választ a még hátralévő két kérdésre.

Előbb a φ esésvonal - hajlást határozzuk meg. Ehhez a 2. ábra mellékábrája szerint:

$$d = w \cdot \cos \varphi; \quad (19)$$

most (18) és (19) - cel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} &= \frac{1}{w^2 \cdot \cos^2 \varphi}; \text{ rendezve:} \\ \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} &= \frac{1}{w^2} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{w^2}; \end{aligned} \quad (20)$$

majd (7), (10), (13) és (20) - szal:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b \cdot c \cdot \cos \alpha} + \frac{1}{a \cdot c \cdot \cos \beta} &= \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{a \cdot b \cdot \cos \gamma}; \text{ átalakításokkal:} \\ \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1}{b \cdot \cos \alpha} + \frac{1}{a \cdot \cos \beta} \right) &= \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{a \cdot b \cdot \cos \gamma}, \\ \frac{1}{c} \cdot \frac{a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha}{b \cdot \cos \alpha \cdot a \cdot \cos \beta} &= \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{a \cdot b \cdot \cos \gamma}; \text{ mivel a 2. ábra szerint is:} \end{aligned}$$

$$a \cdot \cos \beta + b \cdot \cos \alpha = c, \text{ ezért}$$

$$\frac{1}{b \cdot \cos \alpha \cdot a \cdot \cos \beta} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{a \cdot b \cdot \cos \gamma}; \text{ majd egyszerűsítve:}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos \gamma}; \text{ rendezve:}$$

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} ; \text{ innen:}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} . \quad (21)$$

Most (2), (9), (12) és (21) - gyel:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \sqrt{\frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c} \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2 \cdot a \cdot c}}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{(b^2+c^2-a^2) \cdot (a^2+c^2-b^2)} \cdot \frac{2 \cdot a \cdot c \cdot 2 \cdot b \cdot c}{2 \cdot a \cdot b}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{(b^2+c^2-a^2) \cdot (a^2+c^2-b^2)} \cdot 2 \cdot c \cdot c} = \sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{(b^2+c^2-a^2) \cdot (a^2+c^2-b^2)}} , \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{(-a^2+b^2+c^2) \cdot (a^2-b^2+c^2)}} , \quad (22)$$

innen:

$$\varphi(a, b, c) = \operatorname{arctg} \left[\sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{(-a^2+b^2+c^2) \cdot (a^2-b^2+c^2)}} \right] . \quad (23)$$

Ezután a $\mathbf{d} = \mathbf{OD}$ távolságot fejezzük ki $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ - vel.

Most

$$\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2} = \frac{1}{d^2} . \quad (18)$$

átrendezésével:

$$d^2 = \frac{1}{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}} , \text{ innen:}$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + \frac{1}{w^2}}} . \quad (24)$$

Majd (8), (11), (14) és (24) - gyel:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{b^2+c^2-a^2} + \frac{2}{a^2+c^2-b^2} + \frac{2}{a^2+b^2-c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2} \right)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2+c^2-a^2} + \frac{1}{a^2+c^2-b^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}}} , \text{ tehát:} \end{aligned}$$

$$d(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{-a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2-b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2-c^2}}} . \quad (25)$$

A (8), (11), (14) és a (23), (25) képletek a kitűzött feladat megoldását adják.

Speciális esetek

S1.) $b = a \neq c$: (*)

az **ABC** háromszög *egyenlő szárú*;

akkor (8), (11) és (14) szerint:

$$u^*(a, b, c) = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} ; \quad (8^*)$$

$$v^*(a, b, c) = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} ; \quad (11^*)$$

$$w^*(a, b, c) = \sqrt{\frac{2 \cdot a^2 - c^2}{2}} . \quad (14^*)$$

Majd (23) és (*) szerint:

$$\varphi^*(a, b, c) = \arctg \left[\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot a^2 - c^2}{c^2}} \right] = \arctg \left[\sqrt{2 \cdot \left(2 \cdot \frac{a^2}{c^2} - 1 \right)} \right] ; \quad (23^*)$$

ezután (25) és (*) szerint:

$$d^*(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{c^2} + \frac{1}{2 \cdot a^2 - c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{2 \cdot \left(2 + \frac{1}{2 \cdot \frac{a^2}{c^2} - 1} \right)}} . \quad (25^*)$$

S2.) $b = a = c$: (**)

az **ABC** háromszög *szabályos*;

akkor (8*), (11*), (14*) és (**) szerint:

$$u^{**}(a, b, c) = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} ; \quad (8^{**})$$

$$v^{**}(a, b, c) = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} ; \quad (11^{**})$$

$$w^{**}(a, b, c) = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} . \quad (14^{**})$$

Majd (23*) és (**) szerint:

$$\varphi^{**}(a, b, c) = \arctg(\sqrt{2}) \approx 54,74^\circ ; \quad (23^{**})$$

ezután (25 *) és (**) szerint:

$$d^{**}(a, b, c) = \frac{c}{\sqrt{6}} \approx 0,4082 \cdot c . \quad (25^{**})$$

Ezzel kitűzött céljainkat elértük.

Összegzés

Ebben a feladatban sokévnnyi felhalmozott ismeret lett bemutatva, alkalmazva.

Emellett némelyik összefüggés számunkra is új.

Az (**a, b, c**) oldalú, általános háromszög alakú, élei mentén a koordináta - síkoknak támaszkodó háromszög / lemez térbeli helyzetét a (8), (11), (14) képletekkel adott tengelymetszetekkel egyértelműen meghatároztuk. Esésvonalának hajlását a (23), a koordináta - rendszer **O** kezdőpontjától mért távolságát a (25) képlet adja meg.

A kapott eredményekkel máshol még nemigen találkoztunk. Hasonló, illetve egyező összefüggésekkel találkozhat még az érdeklődő Olvasó *axonometriával* foglalkozó régebbi dolgozatainkban.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnökstanár

Szödliget, 2017. 12. 30.